la dimension de $\mathbb{R}^3$; alors la matrice A n'est pas diagonalisable. Soit $P = (u|v|w)$ la matrice formée de vecteurs propres, alors $Aw = 4w + v$; alors

$$\begin{cases} 8x - y - 5z = 4x + 1 \\ -2x + 3y + z = 4y - 1 \\ 4x - y - z = 4z + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - y - 5z = 1 \\ -2x - y + z = -1 \\ 4x - y - 5z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ x = 1/3 \\ z = 0 \end{cases}$$

donc la matrice $P = (u|v|w)$ formée de vecteurs propres est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vérification : on a $T = P^{-1}AP$ alors $PT = AP$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, alors on peut vérifier facilement que

$$\begin{aligned} PT &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \frac{7}{3} \\ 2 & -4 & \frac{1}{3} \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ AP &= \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \frac{7}{3} \\ 2 & -4 & \frac{1}{3} \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement, on en déduit que A n'est pas diagonalisable, mais elle est trigonalisable au sens de Jordan.

□

Exercice 4

Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
3. Étudier la suite A^n des puissances de A.
4. Trigonaliser la matrice A.

Solution : Considérons la A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Le polynôme caractéristique de la matrice A est donné par $P_A(x) = \det(A - xI_4)$

$$\begin{aligned}
\det(A - xI_3) &= \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} \\
&= -x \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ 1/2 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -x & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -x(-x^3 + 1/2) - x(1/2 - 0) \\
&= x^4 - x
\end{aligned}$$

   d'où $P_A(x) = x(x^3 - 1)$.

2. Les valeurs propres et les vecteurs propres de A :
   - les valeurs propres de A : le spectre de A est l'ensemble des valeurs propres de A ; soit

     $$\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \,/\, P_A(\lambda) = \lambda(\lambda^3 - 1) = 0\}$$

     donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0; 1; \mathrm{j}; \mathrm{j}^2\}$ où j et j^2 sont les racines du polynôme $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$. On rappelle que

     $$\mathrm{j} = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad \mathrm{j}^2 = e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$$

   - Soit λ une valeur propre de A et $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à λ, alors $Au = \lambda\, u$; donc

     $$\begin{cases} t = \lambda x \\ t = \lambda y \\ x + y = 2\lambda z \\ z = \lambda t \end{cases}$$

     - pour $\lambda = 0$, on a $z = t = 0$ et $y = -x$; donc $u_1 = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$. D'où on prend $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
     - pour $\lambda = 1$, on a $z = t = x = y$; donc $u_2 = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$. D'où on prend $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
     - pour $\lambda = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$, on a $x = y$, $x = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} z$ et $z = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} t$; donc $u_3 = \begin{pmatrix} x \\ x \\ \mathrm{j}^2 x \\ \mathrm{j}x \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$. D'où on prend $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \mathrm{j}^2 \\ \mathrm{j} \end{pmatrix}$

- pour $\lambda = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, on a $x = y$, $x = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z$ et $z = e^{-i\frac{2\pi}{3}}t$; donc $u_4 = \begin{pmatrix} x \\ x \\ \mathrm{j}x \\ \mathrm{j}^2 x \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$.

  D'où on prend $u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \mathrm{j} \\ \mathrm{j}^2 \end{pmatrix}$

3. La matrice A a 4 valeurs propres distinctes, alors A admet 4 vecteurs propres associés à ces valeurs propres, donc les vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4 sont indépendants ; soit la matrice $P = (u_1|u_2|u_3|u_4)$; donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \\ 0 & 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \end{pmatrix}$$

est une matrice inversible et la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$; et on a

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{j}^2 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que $A^n = PD^nP^{-1}$

4. les puissances de A : on a $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{j}^2 \end{pmatrix}$. Il en résulte que $A^n = PD^nP^{-1}$. La suite des matrices D^n est périodique, on a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on pourra voir que $D^{n+3} = D^n$ et prend 3 valeurs seulement ; il en est donc de même de la suite A^n et plus exactement :

$$A^{3p+1} = A, \quad A^{3p+2} = A^2 \quad \text{et} \quad A^{3p+3} = A^3.$$

□

Exercice 5

1. Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

On appelle la **trace** de A le nombre noté "tr(A)" défini par $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$.
Montrer que le polynôme caractéristique $P_A(x)$ de A s'écrit sous la forme

$$P_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A)$$

2. Soit A une matrice carrée d'ordre 3 dont les valeurs propres sont notées par λ_1, λ_2 et λ_3.
   (a) Donner les expressions de "det(A)" et "tr(A)" en fonction λ_1, λ_2 et λ_3.

(b) Montrer que le polynôme caractéristique de A s'écrit sous la formr :

$$P(x) = -x^3 + \mathrm{tr}(A)x^2 - \left(\sum_{i=1}^{3} \det(A_{ii})\right) x + \det(A)$$

où A_{ii} est la sous matrice de A en enlevant le i^{eme} ligne et la i^{eme} colonne.

(c) Montrer que si $\lambda_1 = 1$ alors

$$\sum_{i=1}^{3} \det(A_{ii}) = \mathrm{tr}(A) + \det(A) - 1,$$

puis exprimer ce résultat en fonction de λ_2 et λ_3.

(d) On suppose que $\lambda_1 = 1$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$. Trouver une relation entre λ_2 et λ_3, puis calculer λ_2 telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \det(A_{ii}) = 0$.

Solution :

1. considérons la matrice A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

On appelle la **trace** de A le nombre noté "$\mathrm{tr}(A)$" défini par $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$.
Montrons que le polynôme caractéristique $P_A(x)$ de A est $P_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A)$: en effet, par définition, le polynôme caractéristique de A est $P_A(x) = \det(A - xI_2)$

$$\begin{aligned} \det(A - xI_2) &= \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - x \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - x)(a_{22} - x) - a_{12}a_{21} \\ &= x^2 - (a_{11} + a_{22})x + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

or $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$ et $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, alors

$$\det(A - xI_2) = x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A)$$

d'où $P_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A)$.

2. Considérons A une matrice carrée d'ordre 3 dont les valeurs propres sont notées par λ_1, λ_2 et λ_3.

(a) Les expressions de "$\det(A)$" et "$\mathrm{tr}(A)$" en fonction λ_1, λ_2 et λ_3 sont

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad \text{et} \quad \det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

(b) Montrons que le polynôme caractéristique de A s'écrit sous la forme :

$$P(x) = -x^3 + \mathrm{tr}(A)x^2 - \left(\sum_{i=1}^{3} \det(A_{ii})\right) x + \det(A)$$

où A_{ii} est la sous matrice de A en enlevant le $i^{\text{ème}}$ ligne et la $i^{\text{ème}}$ colonne. En effet, par définition, le polynôme caractéristique de A est $P_A(x) = \det(A - xI_3)$

$$\begin{aligned} \det(A - xI_3) &= \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - x \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - x)\begin{vmatrix} a_{22} - x & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - x \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} - x \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} - x \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - x)(a_{22} - x)(a_{33} - x) - a_{23}a_{32}(a_{11} - x) - a_{12}a_{21}(a_{33} - x) \\ &\quad + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{31}(a_{22} - x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(A-xI_3) &= -x^3+(a_{11}+a_{22}+a_{33})x^2-(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}+a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})x \\
&\quad +(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}) \\
&= -x^3+(\mathrm{tr}(A))x^2-\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\right)x \\
&\quad +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \\
&= -x^3+\mathrm{tr}(A)x^2-\left(\sum_{i=1}^{3}\det(A_{ii})\right)x+\det(A)
\end{aligned}$$

d'où $P_A(x)=-x^3+\mathrm{tr}(A)x^2-\left(\sum_{i=1}^{3}\det(A_{ii})\right)x+\det(A)$.

(c) Supposons que $\lambda_1=1$ alors $P_A(\lambda_1)=P_A(1)=0$; donc

$$0=-1+\mathrm{tr}(A)-\left(\sum_{i=1}^{3}\det(A_{ii})\right)+\det(A)$$

d'où le résultat $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\det(A_{ii})=\mathrm{tr}(A)+\det(A)-1$. Finalement, on obtient

$$\sum_{i=1}^{3}\det(A_{ii})=1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_2\lambda_3-1.$$

(d) Supposons $\lambda_1=1$ et $\mathrm{tr}(A)=0$ avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\det(A_{ii})=0$, alors $1+\lambda_2+\lambda_3=0$ et $\lambda_2\lambda_3-1=0$ d'où $\lambda_2\lambda_3=1$ et $\lambda_2+\lambda_3=-1$; donc pour trouver λ_2 et λ_3 on doit résoudre le système suivant

$$(*)\left\{\begin{array}{ll}\lambda_2\lambda_3 & =1 \\ \lambda_2+\lambda_3 & =-1\end{array}\right. \quad\Rightarrow\left\{\begin{array}{ll}\lambda_2\lambda_3 & =1 \\ \lambda_2^2+\lambda_2+1 & =0\end{array}\right.$$

une équation de type $x^2+x+1=0$ admet pour solution $x_1=\mathrm{j}$ et $x_2=\mathrm{j}^2$, donc le système (*) a pour solution $(\lambda_2,\lambda_3)=(\mathrm{j},\mathrm{j}^2)$ et $(\lambda_2,\lambda_3)=(\mathrm{j}^2,\mathrm{j})$
ce type de matrice A a pour spectre l'ensemble $\mathrm{Sp}(A)=\{1;\mathrm{j};\mathrm{j}^2\}$.

□

Exercice 6

Soit M la matrice donnée par

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer les éléments propres de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ou trigonalisable ? .
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$ à partir de la somme directe des sous-espaces propres de A.

Solution : Considérons la matrice M donnée par

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

1. Les éléments propres de la matrice A sont les **valeurs propres**, les **vecteurs propres** et les **sous-espaces propres** : en effet
   – **les valeurs propres de** M : le polynôme caractéristique de la matrice M est donné par $P_M(x) = \det(M - xI_4)$

$$\begin{aligned}
\det(M - xI_4) &= \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4-x & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2-x & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -x \end{vmatrix} \\
&= (1-x)\begin{vmatrix} 4-x & 1 & -2 \\ 1 & 2-x & -1 \\ 2 & 1 & -x \end{vmatrix} \\
&= (1-x)\left[-x^3 + 6x^2 - 12x + 8\right]
\end{aligned}$$

   d'où $P_M(x) = (x-1)(x-2)^3$.
   Les valeurs propres de M sont telles que $P_M(x) = 0$, soit $(x-1)(x-2)^3 = 0$, d'où le spectre de M est $\mathrm{Sp}(M) = \{1; 2\}\cdot$ La matrice M admet deux valeurs propres 1 qui est simple et 2 d'ordre de multiplicité 3.
   – **Les vecteurs propres de** M **:** soit $u = (x, y, z, t)^T$ un vecteur propre de M associé à la valeurs propre λ, alors $M\,u = \lambda\,u$; donc

$$\begin{cases} x & = \lambda\,x \\ -x + 4y + z - 2t & = \lambda\,y \\ 2x + y + 2z - t & = \lambda\,z \\ x + 2y + z & = \lambda\,t \end{cases}$$

   - pour $\lambda = 1$, alors

$$\begin{cases} x & = x \\ -x + 4y + z - 2t & = y \\ 2x + y + 2z - t & = z \\ x + 2y + z & = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = x \\ -x + 3y + z - 2t & = 0 \\ 2x + y + z - t & = 0 \\ x + 2y + z - t & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & \in \mathbb{R} \\ y & = x \\ z & = -4x \\ t & = -x \end{cases}$$

     pour $x = 1$, on prend pour vecteur propre associé à la valeur propre 1, le vecteur $u = (1, 1, -4, -1)^T$.
   - pour $\lambda = 2$, alors

$$\begin{cases} x & = 2x \\ -x + 4y + z - 2t & = 2y \\ 2x + y + 2z - t & = 2z \\ x + 2y + z & = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ -x + 2y + z - 2t & = 0 \\ 2x + y - t & = 0 \\ x + 2y + z - 2t & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & \in \mathbb{R} \\ z & = 0 \\ t & = y \end{cases}$$

     pour $y = 1$, on prend pour vecteur propre associé à la valeur propre 2, le vecteur $v = (0, 1, 0, 1)^T$.
   – **Les sous-espaces propres de** M : soit $E_1 = \mathrm{Ker}(M - I_4)$ le sous-espace propre de M associé à la valeur propre 1, alors

$$E_1 = \mathrm{Ker}(M - I_4) = \{\alpha\,u \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

   où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; donc le sous-espace propre $E_1 = \mathrm{Ker}(M - I_4)$ est la droite vectorielle de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Soit $E_2 = \mathrm{Ker}(M - 2I_4)$ le sous-espace propre de M associé à la valeur propre 2, alors

$$E_2 = \mathrm{Ker}(M - 2I_4) = \{\beta\, v \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

où $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; donc le sous-espace propre $E_2 = \mathrm{Ker}(M - 2I_4)$ est la droite vectorielle de vecteur directeur $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. D'après la question 2, on a montré que le sous-espace propre E_2, notée $E_2 = \mathrm{Ker}(M - 2I_4)$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1. La dimension de $\mathrm{Ker}(M - 2I_4)$ est 1 qui est strictement inférieure à l'ordre de multiplicité 3 de la valeur propre 2 ; d'où la matrice A n'est pas diagonalisable mais elle trigonalisable au sens de Jordan. On peut trouver une matrice $P = (u|v|v_1|v_2)$ et une matrice de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

telles que $J = P^{-1}MP$. Les vecteurs v_1 et v_2 sont déterminés par les relations $Mv_1 = 2v_1 + v$ et $Mv_2 = 2v_2 + v_1$.

3. Une base de $\mathbb{R}^4$ à partir des vecteurs propres de M : le système $\{u; v\}$ est libre dans $\mathbb{R}^4$, alors d'après le théorème de la base incomplète on peut déterminer deux vecteurs v_1 et v_2 par les relations $Mv_1 = 2v_1 + v$ et $Mv_2 = 2v_2 + v_1$ afin de poser $\{u; v; v_1; v_2\}\cdot$
   - On détermine v_1 tel que $Mv_1 = 2v_1 + v$ où $v_1 = (x, y, z, t)^T$, alors

$$\left\{\begin{array}{ll} x & = 2x \\ -x + 4y + z - 2t & = 2y + 1 \\ 2x + y + 2z - t & = 2z \\ x + 2y + z & = 2t + 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & = 0 \\ -x + 2y + z - 2t & = 1 \\ 2x + y - t & = 0 \\ x + 2y + z - 2t & = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & = 0 \\ y & = 0 \\ z & \in \mathbb{R} \\ t & = 0 \end{array}\right.$$

   d'où on prend $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   - On détermine v_2 tel que $Mv_2 = 2v_2 + v_1$ où $v_2 = (x, y, z, t)^T$, alors

$$\left\{\begin{array}{ll} x & = 2x \\ -x + 4y + z - 2t & = 2y + 0 \\ 2x + y + 2z - t & = 2z + 1 \\ x + 2y + z & = 2t \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & = 0 \\ -x + 2y + z - 2t & = 0 \\ 2x + y - t & = 1 \\ x + 2y + z - 2t & = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & = 0 \\ y & \in \mathbb{R} \\ z & = -2 \\ t & = 0 \end{array}\right.$$

   d'où on prend $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   La matrice $P = (u|v|v_1|v_2)$ est donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit F le sous-espace vectoriel engendré par le système $\{v_1; v_2\}$ où $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors F est de dimension 2 ; donc on peut conclure $\mathbb{R}^3$ pour somme directe de sous-espces propres

$$\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(M - I_4) \oplus \mathrm{Ker}(M - 2I_4) \oplus F$$

□

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et f un endomorphisme de E tel que $f^p = id_E$ l'identité de E. Soit α une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité et n'est pas valeur propre de f. Montrer que l'on a :

$$f^{p-1} + \alpha f^{p-2} + \ldots + \alpha^{p-1} id_E = 0_{E,E}.$$

Solution : Considérons E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et f un endomorphisme

de E tel que $f^p = id_E$ l'identité de E. Soit α une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité et qui n'est pas valeur propre de f.
Montrons que l'on a : $f^{p-1} + \alpha f^{p-2} + \ldots + \alpha^{p-1}\mathrm{id}_E = 0_{E,E}$.
Pour tous réels x et y avec $(x \neq y)$, on a

$$\frac{x^p - y^p}{x - y} = x^{p-1} + x^{p-2}y + x^{p-3}y^2 + \ldots + xy^{p-2} + y^{p-1}$$

alors on pourra utiliser la même technique pour évaluer le fait que $\alpha^p = 1$ et $f^p = id_E$ et d'obtenir

$$f^p - \alpha^p \mathrm{id}_E = (1 - \alpha^p)\mathrm{id}_E = (1 - 1)\mathrm{id}_E = 0.\mathrm{id}_E = 0_{E,E}$$

donc d'une part on a $(f - \alpha \mathrm{id}_E)^{-1}(f^p - \alpha^p \mathrm{id}_E) = (f^p - \alpha^p \mathrm{id}_E)(f - \alpha \mathrm{id}_E)^{-1} = 0_{E,E}$, et d'autre part on a

$$(f - \alpha \mathrm{id}_E)^{-1}(f^p - \alpha^p \mathrm{id}_E) = (f^p - \alpha^p \mathrm{id}_E)(f - \alpha \mathrm{id}_E)^{-1} = f^{p-1} + \alpha f^{p-2} + \alpha^2 f^{p-3} + \ldots + \alpha^{p-2} f + \alpha^{p-1}\mathrm{id}_E$$

d'où on obtient $f^{p-1} + \alpha f^{p-2} + \alpha^2 f^{p-3} + \ldots + \alpha^{p-2} f + \alpha^{p-1}\mathrm{id}_E = 0_{E,E}$. □